

RAPPORT de TP

Élément Fini

Influence de la taille du maillage et de la formulation des éléments

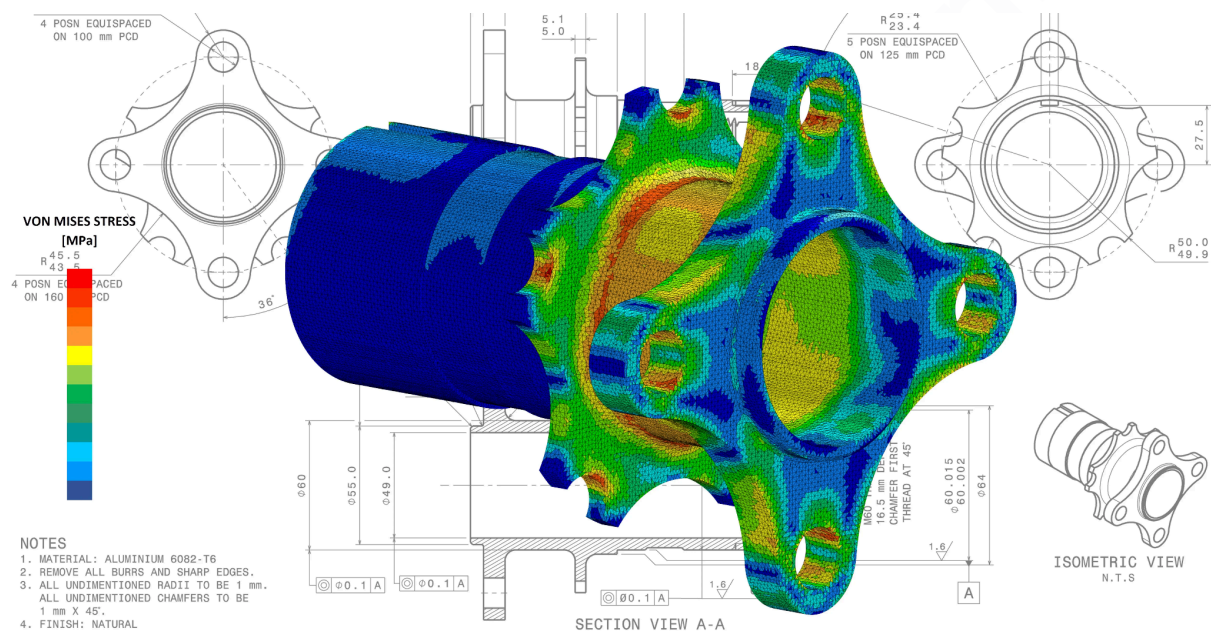


Figure 1 : Illustration Élément Fini - Source : <https://blog.spatial.com/finite-element-modeling>

Encadrants : Dr. Salah ELBARNATY
Prof. J.P.M. CORREIA

Table des matières

1 - Introduction.....	3
1.1 - Contexte & Objectif.....	3
1.2 - Remerciements.....	3
2 - Solution analytique de référence.....	4
2.1 - Hypothèses.....	4
2.2 - Moment quadratique de la section.....	4
2.3 - Contrainte normale maximale.....	4
2.4 - Flèche maximale.....	5
2.5 - Distribution analytique du déplacement vertical.....	5
2.6 - Erreur relative.....	5
3 - Modélisation ABAQUS.....	6
Géométrie, conditions aux limites, matériau, types d'éléments.....	6
4 - Résultats par configuration.....	7
1. Configuration en linéaire CPS4.....	7
a) Maillage 1x6 — CPS4.....	7
b) Maillage 2x12 — CPS4.....	10
c) Maillage 4x12 — CPS4.....	12
d) Maillage 8x24 — CPS4.....	14
2. Configuration en quadratique CPS8.....	16
a) Maillage 1x6 — CPS8.....	16
b) Maillage 2x12 — CPS8.....	18
c) Maillage 4x12 — CPS8.....	20
d) Maillage 8x24 — CPS8.....	22
5 - Analyse et discussion.....	24
1. Influence de la taille de maille (convergence).....	25
2. Influence de l'ordre d'interpolation (CPS4 vs CPS8).....	26
3. Phénomène de verrouillage en cisaillement (shear locking) pour CPS4 avec maillage grossier.....	26
6 - Conclusion.....	27
Bibliographie et Références Techniques.....	28

1 - Introduction

1.1 - Contexte & Objectif

Ce Travail Pratique sur ABAQUS simule la flexion statique d'une poutre de 2 mètres, de section = 20 cm et d'épaisseur = 1 mm soumise à une force de 250 N sous l'hypothèse des contraintes planes.

L'objectif est de valider un modèle élastique linéaire en comparant les prédictions numériques aux solutions théoriques de la résistance des matériaux. L'étude se concentre sur la convergence des résultats en faisant varier la densité du maillage, de 1x6 à 8x24 éléments, ainsi que la formulation des éléments entre linéaire (CPS4) et quadratique (CPS8).

Le travail consiste donc à vérifier l'équilibre via les réactions aux appuis, s'assurer que la contrainte maximale reste inférieure à $\sigma_y = 400$ MPa et quantifier la précision du modèle par le calcul de l'erreur relative sur la flèche maximale.

1.2 - Remerciements

Avant d'entamer la présentation de ces travaux, je tiens à adresser mes remerciements à la Faculté de physique et ingénierie de l'Université de Strasbourg pour les moyens techniques mis à disposition dans le cadre de cette formation.

J'exprime également ma gratitude au **Prof. J.P.M. CORREIA** et **Dr. S. ELBARNATY** pour leurs encadrements, leurs conseils scientifiques avisés et leurs partages d'expériences et de leurs expertises en Élément Fini tout au long de notre formation.

2 - Solution analytique de référence

2.1 - Hypothèses

La poutre est modélisée selon la théorie d'Euler-Bernoulli.

On suppose :

- Comportement élastique linéaire isotrope
- État de contrainte plane (épaisseur = 1 mm)
- Sections droites restent planes et perpendiculaires à la fibre neutre
- Le poids propre est négligé

2.2 - Moment quadratique de la section

La section rectangulaire de largeur $b = 1$ mm (épaisseur) et de hauteur $h = 200$ mm donne :

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{1 \times 200^3}{12} = 6,667 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

2.3 - Contrainte normale maximale

Le moment fléchissant est maximal à l'encastrement, donc on a :

$$M_{max} = F \cdot L = 250 \times 2000 = 5 \times 10^5 \text{ Nmm}$$

La contrainte normale maximale se situe en fibre extrême $y_{max} = h/2 = 100$ mm :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I} = \frac{5 \times 10^5 \times 100}{6,667 \times 10^5} = 75 \text{ MPa}$$

La limite élastique du matériau étant $\sigma_y = 400$ MPa, on vérifie :

$$\sigma_{max} = 75 \text{ MPa} \ll \sigma_y = 400 \text{ MPa}$$

Le matériau reste donc dans le domaine élastique, ce qui valide l'hypothèse de linéarité.

2.4 - Flèche maximale

La flèche en bout de poutre encastree-libre soumise à une force concentrée est :

$$v_{max} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{250 \times 2000^3}{3 \times 210\,000 \times 6,667 \times 10^5} = 4,762 \text{ mm}$$

2.5 - Distribution analytique du déplacement vertical

Le long de la poutre (avec $x = 0$ à l'encastrement), le déplacement vertical est :

$$v(x) = \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3)$$

2.6 - Erreur relative

Pour comparer les résultats éléments finis à la solution de référence, l'erreur relative sur la flèche maximale est définie par :

$$\varepsilon_{rel} = \left| \frac{v_{max}^{FE} - v_{max}^{ref}}{v_{max}^{ref}} \right| \times 100 \quad (\%)$$

3 - Modélisation ABAQUS

Géométrie, conditions aux limites, matériau, types d'éléments

Pour commencer, j'ai créé la géométrie de ma poutre (2000 x 200 mm) et j'ai défini le matériau (acier). J'ai fait très attention à rester cohérent dans mes unités, j'ai donc tout mis en **mm** et en **MPa** (210 000 pour le module d'Young) pour être sûr que mes résultats soient bons.

Une fois que j'ai assigné la section à ma pièce et que je l'ai placée dans l'assemblage, j'ai créé l'étape d'analyse (**Step**). Pour les conditions aux limites (**BCs**), j'ai fixé l'encastrement dès le départ dans le step **initial** pour qu'il reste actif pendant tout le calcul.

Pour gagner du temps et éviter de refaire dix fois la même chose, j'ai utilisé des **Sets** (comme on le voit en [Figure 2](#)). Ça m'a permis de sélectionner mes zones une seule fois et d'appliquer l'encastrement ou la force hyper rapidement sur tous mes modèles. J'ai ensuite simplement dupliqué mon modèle pour tester les huit configurations de maillage demandées.

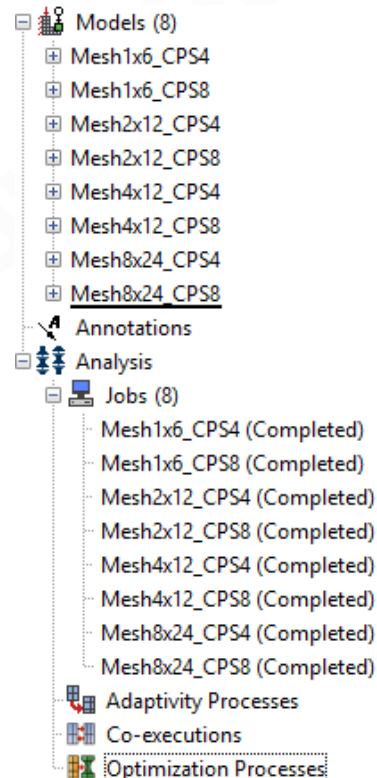


Figure 2 : Arborescence de mes modèles

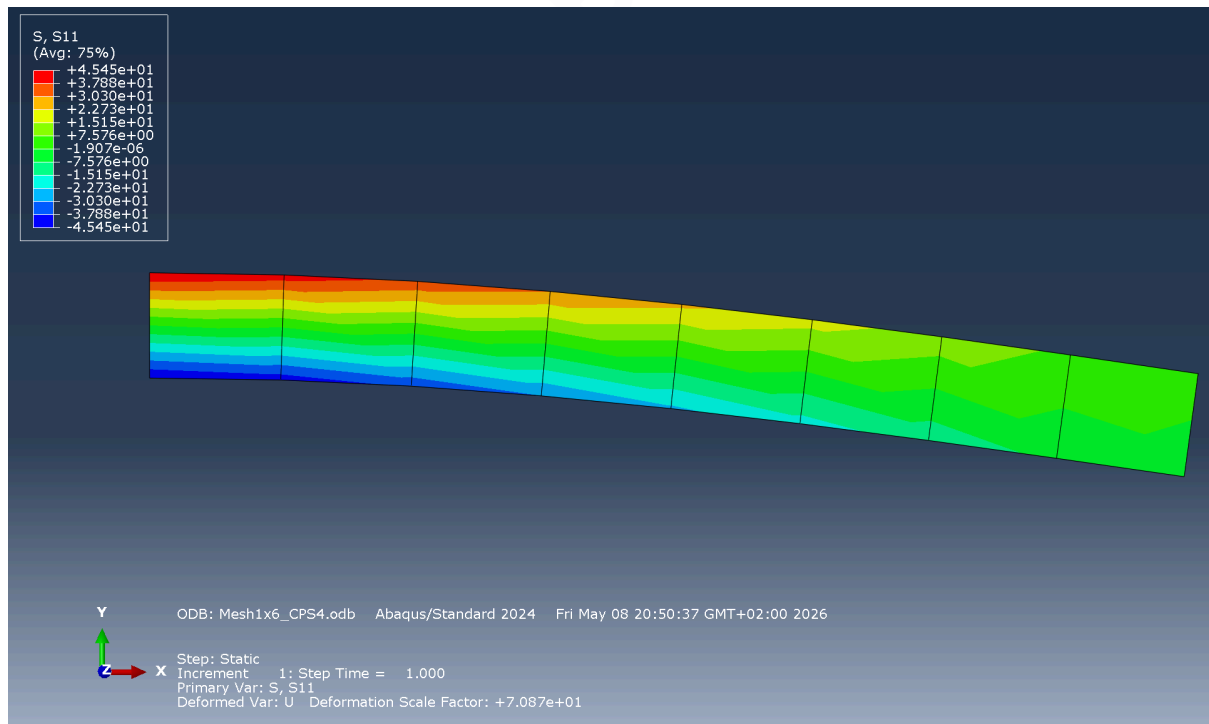
Il y a un point très important, comme ma poutre est très fine (1 mm d'épaisseur), j'ai travaillé avec l'hypothèse des **contraintes planes** (*Plane Stress*). C'est pour ça que j'ai choisi les éléments **CPS4** et **CPS8**. Brièvement, ça dit au logiciel que les forces ne s'exercent que dans le plan de la poutre, ce qui simplifie les calculs tout en restant très précis.

4 - Résultats par configuration

Dans cette section, je présente les résultats visuels pour chaque modèle testé. Pour chaque configuration, j'ai extrait la cartographie des contraintes de Von Mises et la déformée de la poutre. Ces images permettent d'observer directement l'influence du maillage et du type d'élément sur la distribution des efforts.

1. Configuration en linéaire CPS4

a) Maillage 1x6 — CPS4



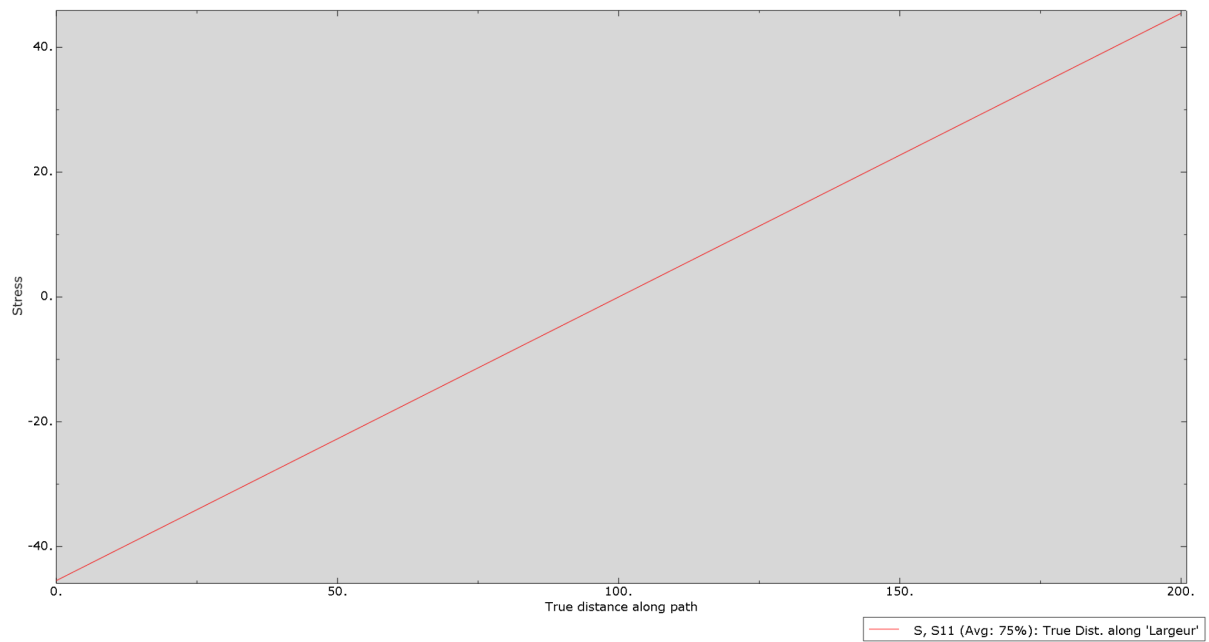


Figure 3 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

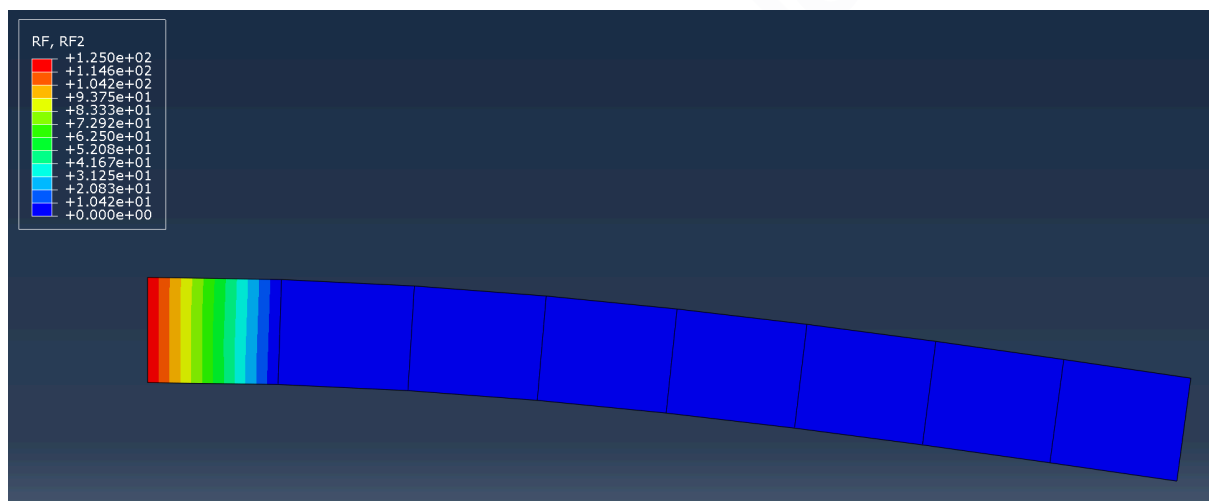


Figure 4 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

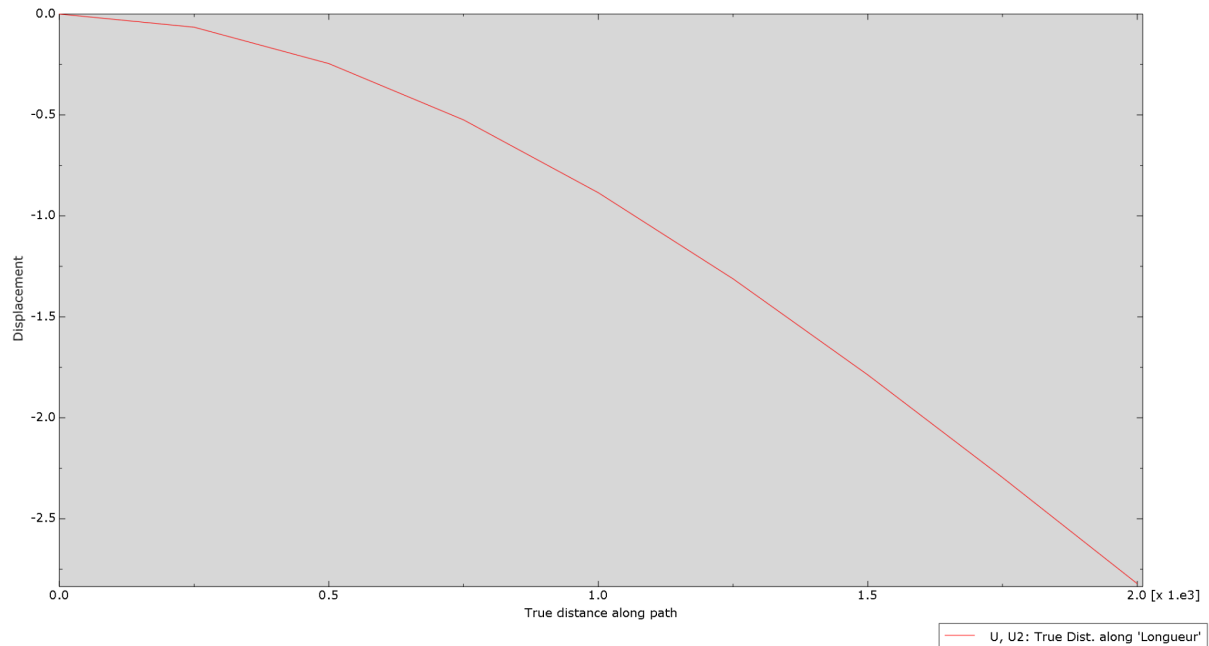


Figure 5 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

On observe bien la déformation et avec seulement 6 éléments linéaires, ce maillage très grossier produit une flèche maximale de 2,822 mm, soit une erreur relative de 40,74 % par rapport à la solution analytique de 4,762 mm — le résultat le plus éloigné de toute la série.

La contrainte normale maximale S11 atteint $\pm 45,5$ MPa, bien en dessous des ± 75 MPa théoriques, ce qui illustre clairement le phénomène de verrouillage en cisaillement (shear locking) parce que les éléments quadrilatéraux linéaires sont trop rigides pour restituer correctement la courbure de flexion. Ensuite, la déformée en U2 est visible mais très sous-estimée, et le gradient de S11 à travers l'épaisseur est déjà linéaire, ce qui est correct qualitativement. La vérification de l'équilibre est en revanche respectée ($\Sigma \text{RF2} = 250 \text{ N}$).

b) Maillage 2x12 — CPS4

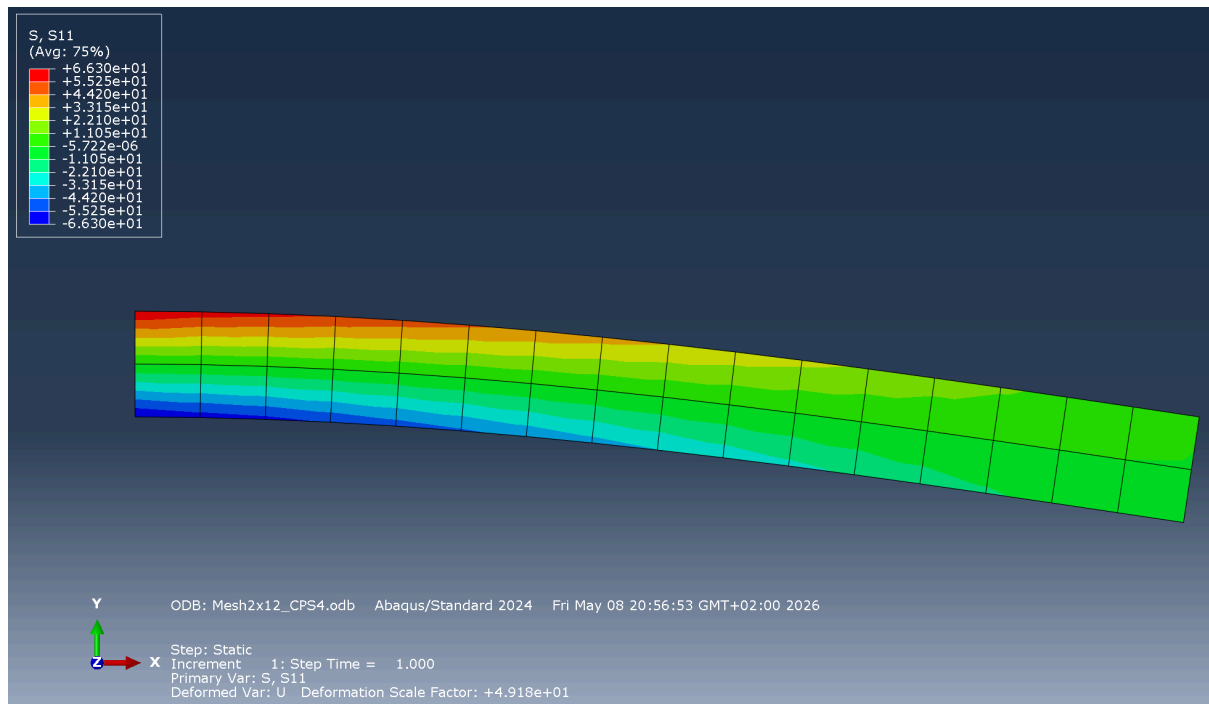


Figure 6 : Visualisation de la contrainte normale axiale (S11)

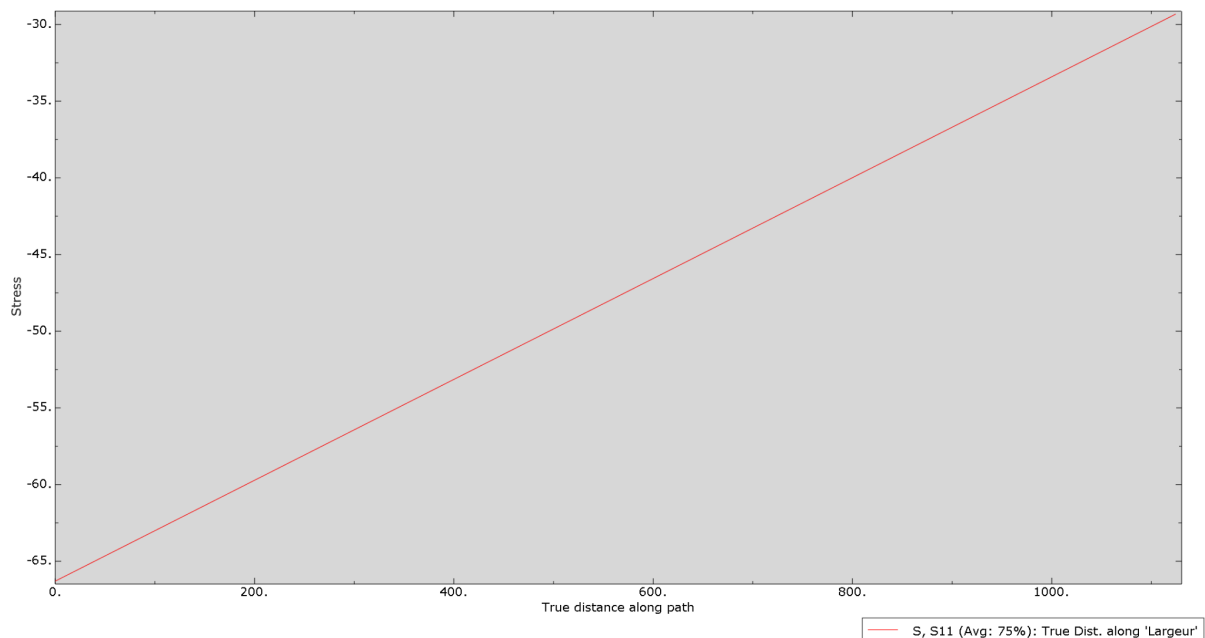


Figure 7 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

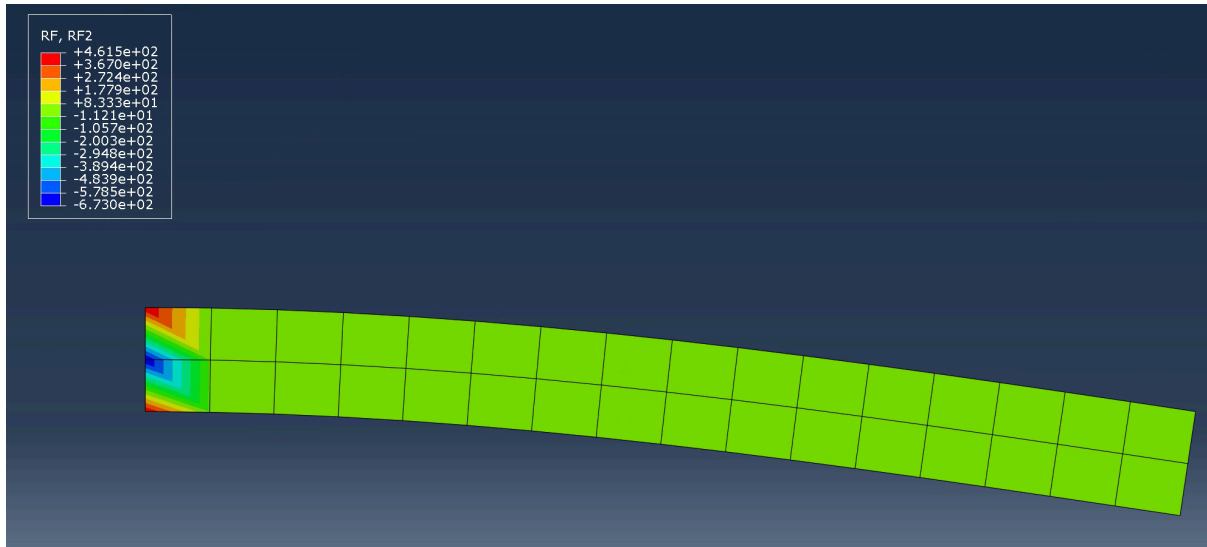


Figure 8 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

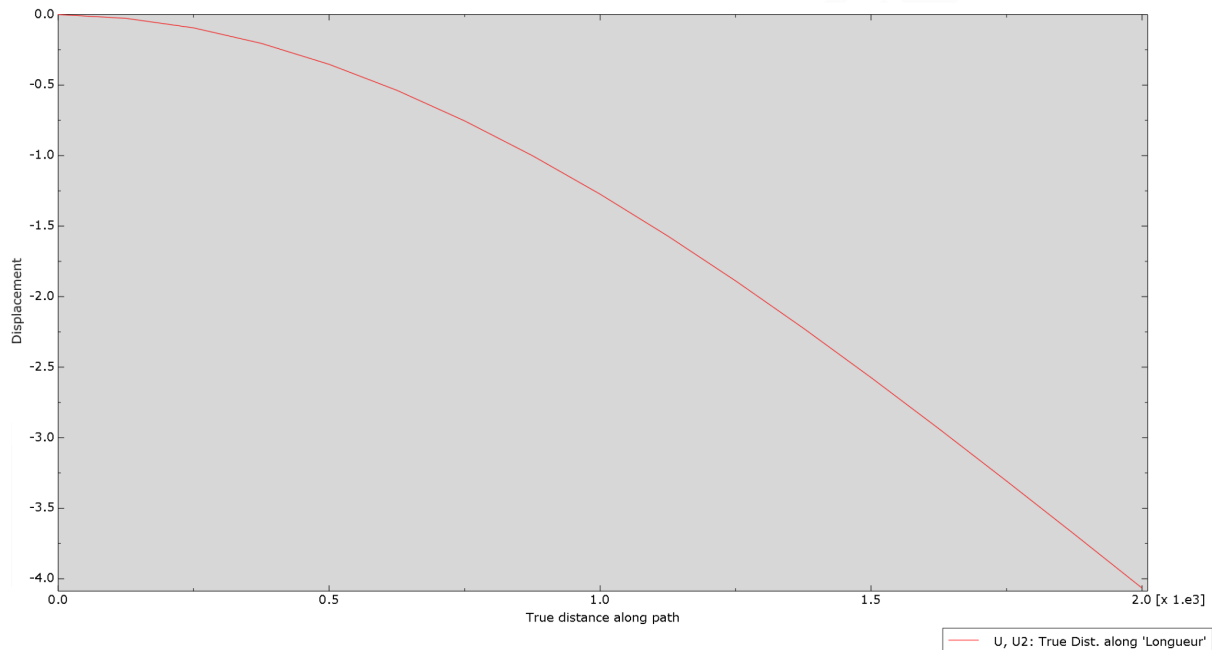


Figure 9 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

En passant à 24 éléments, on observe une nette amélioration car la flèche atteint 4,067 mm (erreur de 14,59 %) et la contrainte monte à $\pm 66,3$ MPa. Le maillage plus fin permet aux éléments de mieux approcher la courbure réelle, réduisant significativement l'effet de shear locking. La distribution de S11 reste linéaire en hauteur, ce qui est cohérent avec la théorie d'Euler-Bernoulli.

Les valeurs nodales de RF2 semblent élevées à première vue (+461 N, -673 N), mais c'est normal car l'encastrement reprend simultanément l'effort tranchant et le moment fléchissant, et leur somme donne bien 250 N. Et la déformée en U2 commence à ressembler davantage à la courbe parabolique théorique.

c) Maillage 4x12 — CPS4

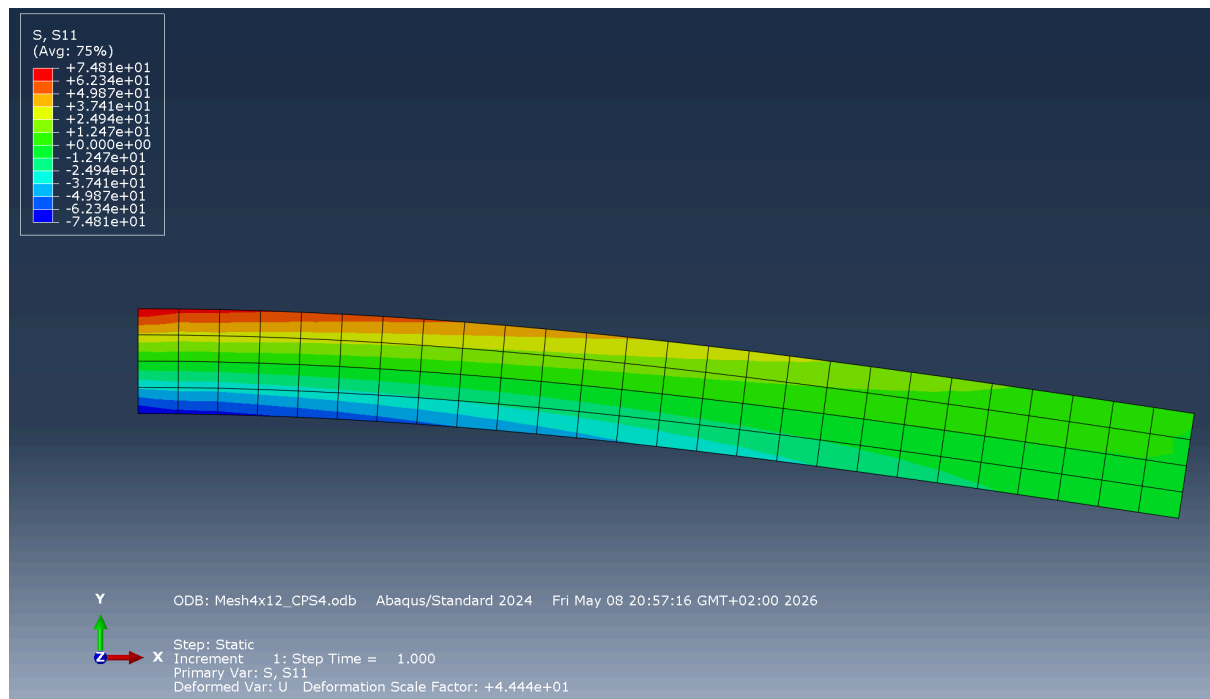


Figure 10 : Visualisation de la contrainte normale axiale (S11)

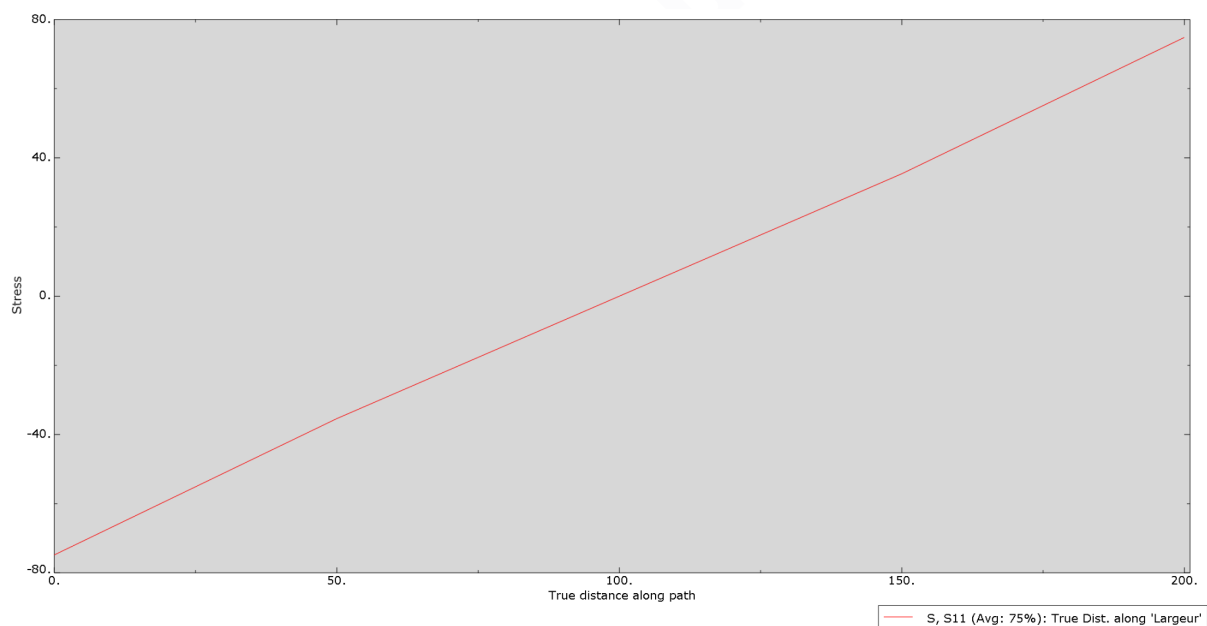


Figure 11 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

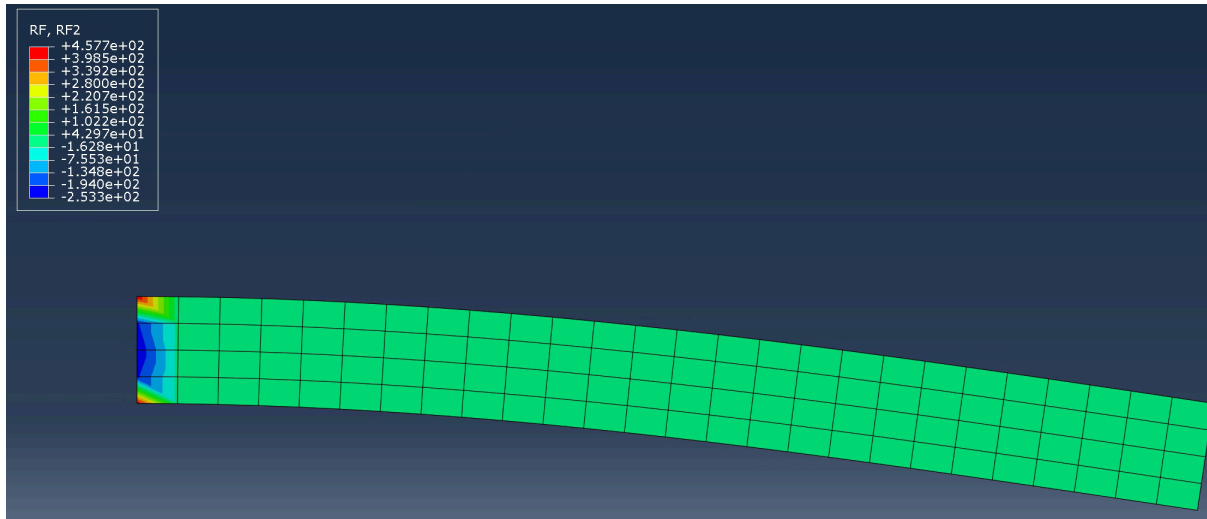


Figure 12 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

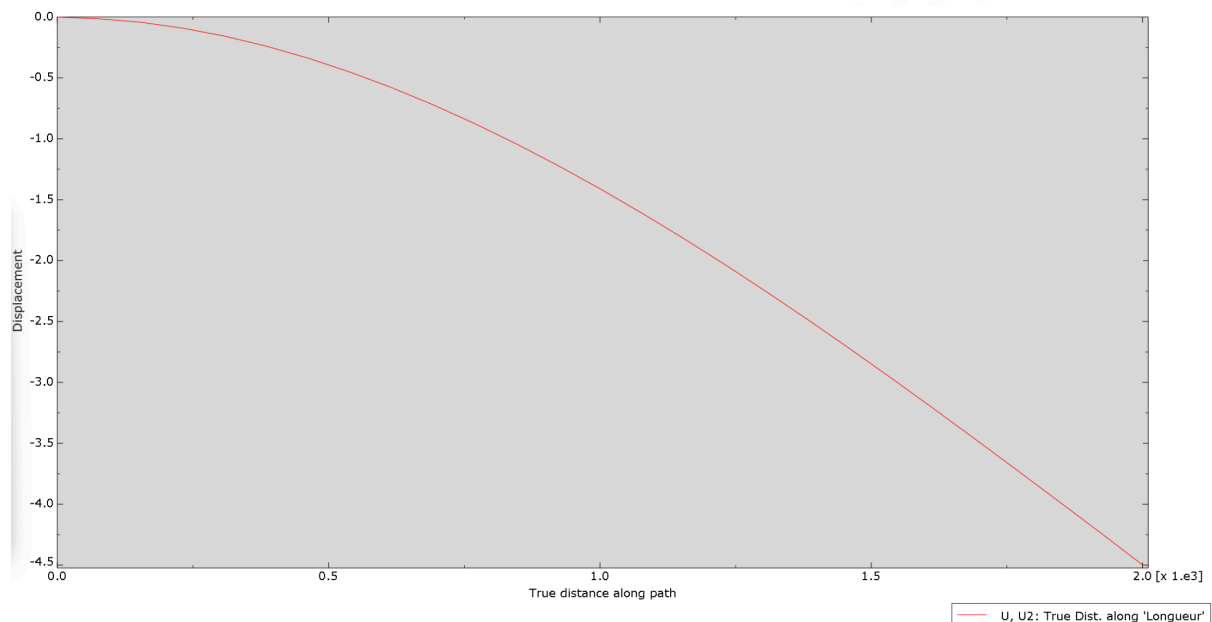


Figure 13 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

Avec 48 éléments, la convergence s'accélère, on voit que la flèche atteint 4,5 mm (erreur de 5,5 %) et la contrainte maximale passe à $\pm 74,8$ MPa, très proche de la valeur théorique de 75 MPa. La déformée est maintenant visuellement proche de la solution analytique cubique. Le maillage plus dense en hauteur (4 éléments) permet de mieux capturer le gradient de contrainte à travers la section, et le gradient de S11 est désormais bien représenté.

On remarque donc que l'essentiel du gain vient des éléments supplémentaires en hauteur car raffiner dans la direction transverse est plus payant que dans la direction longitudinale pour ce type de problème.

d) Maillage 8x24 — CPS4

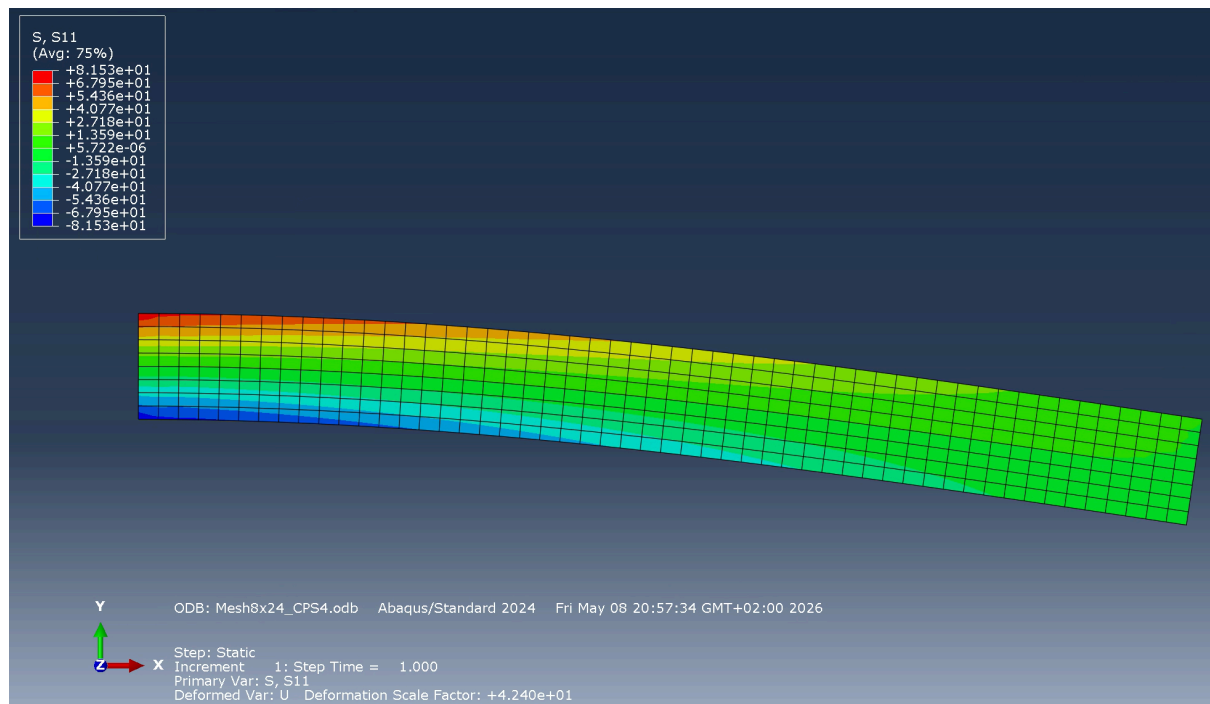


Figure 14 : Visualisation de la contrainte normale axiale (S11)

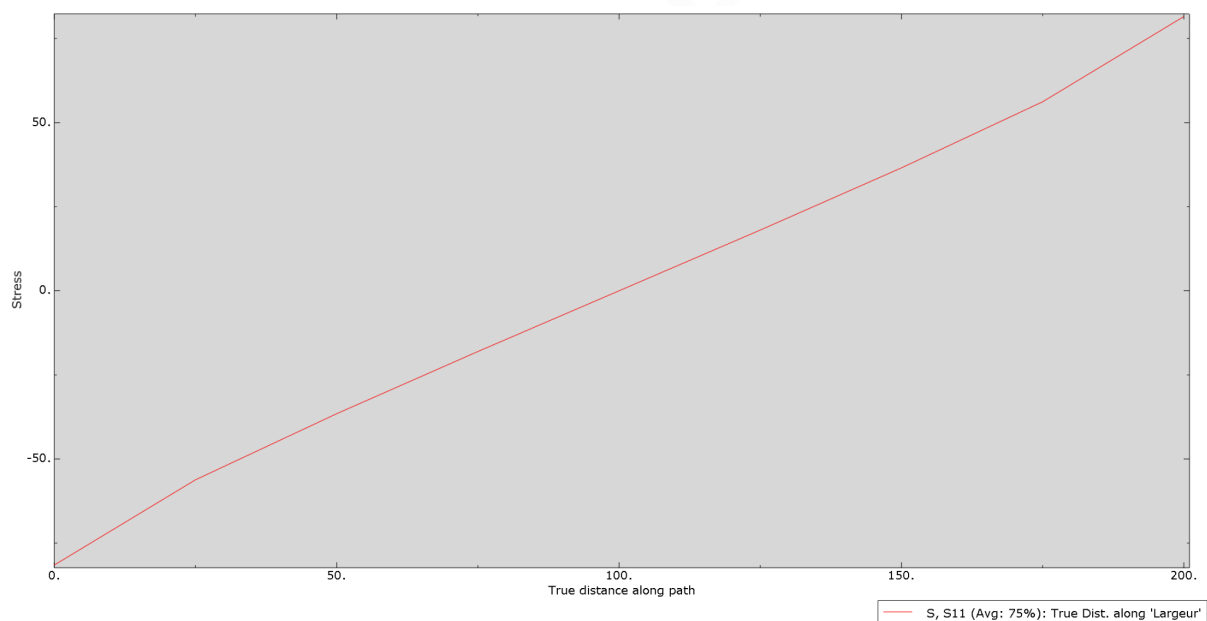


Figure 15 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

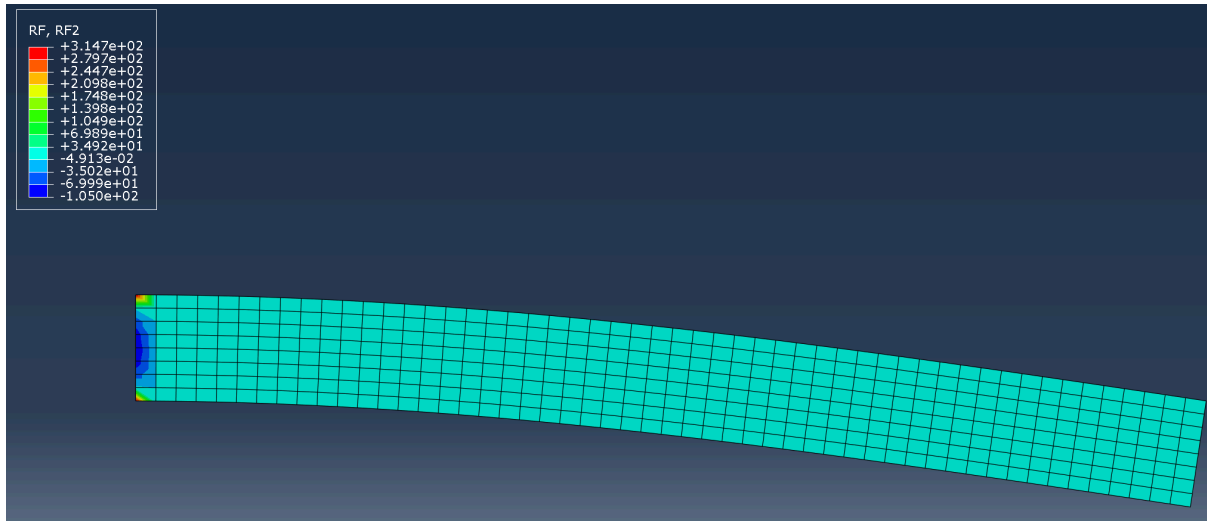


Figure 16 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

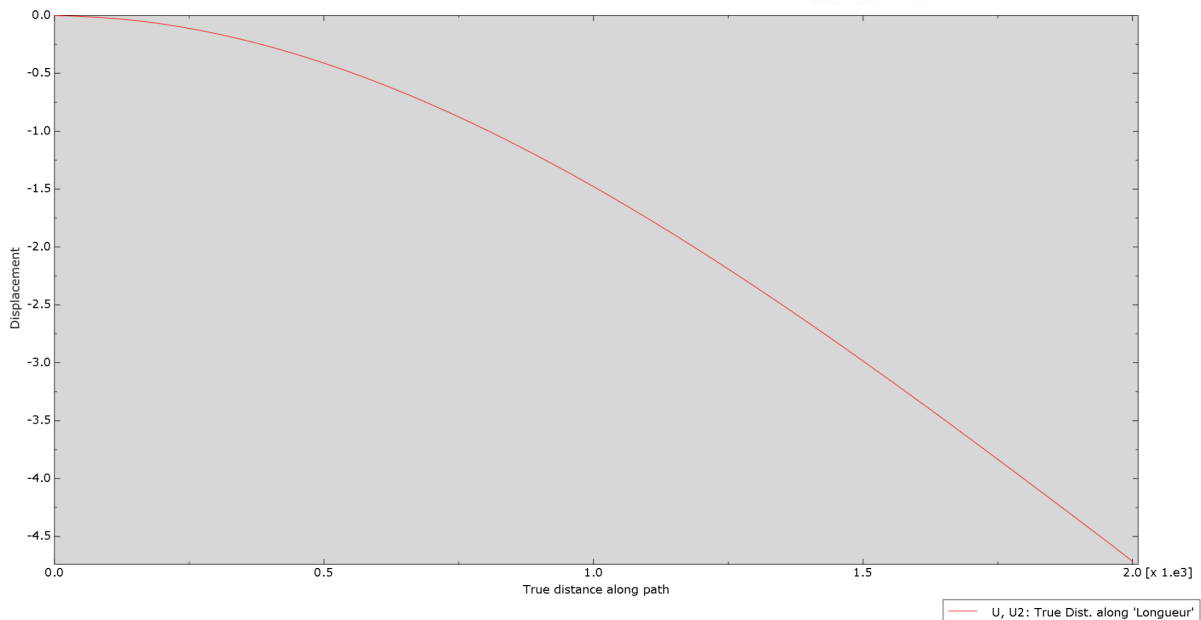


Figure 17 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

Avec 192 éléments, le modèle CPS4 atteint une erreur de seulement 0,94 % et une flèche de 4,717 mm. La contrainte maximale monte à $\pm 81,5$ MPa, ce qui dépasse légèrement la valeur analytique de 75 MPa, cet écart probablement lié aux effets de concentration aux nœuds de l'encastrement et à la résolution plus fine des gradients locaux.

La déformée est quasiment confondue avec la courbe analytique. Ce résultat montre qu'un élément linéaire peut converger vers la bonne solution, mais au prix d'un nombre d'éléments très élevé, ce qui représente un coût calcul significativement plus important que pour les éléments quadratiques.

2. Configuration en quadratique CPS8

a) Maillage 1x6 — CPS8

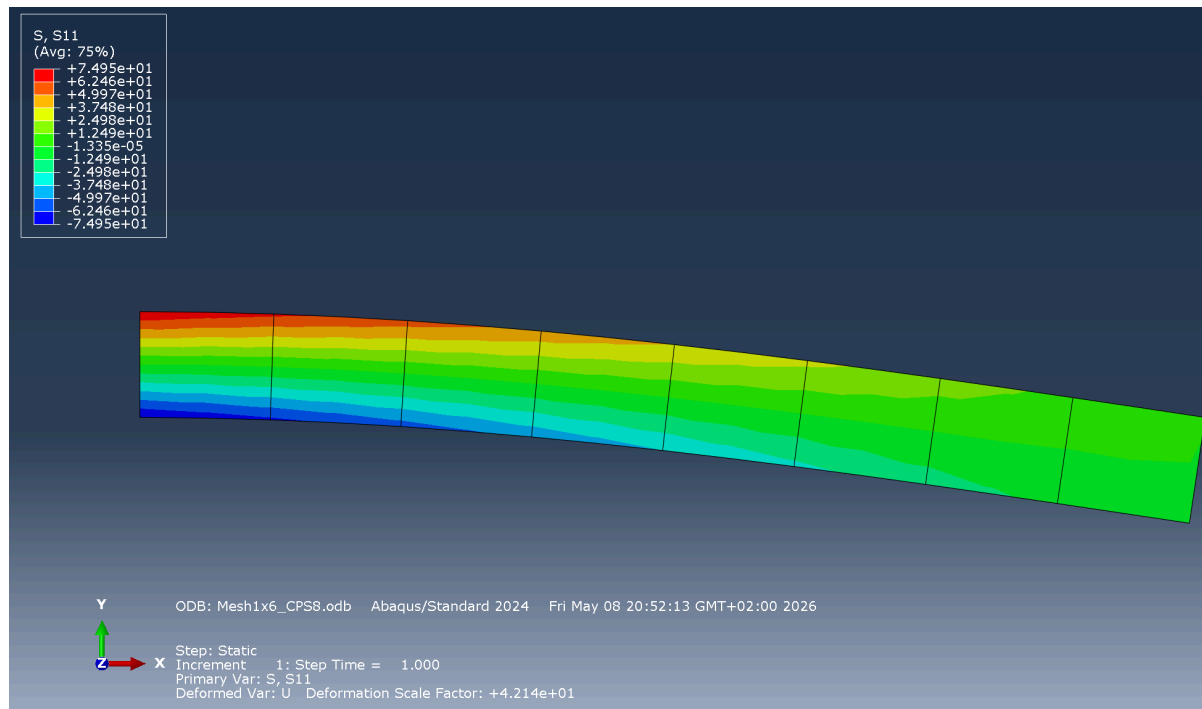


Figure 18 : Visualisation de la contrainte normale axiale (S11)

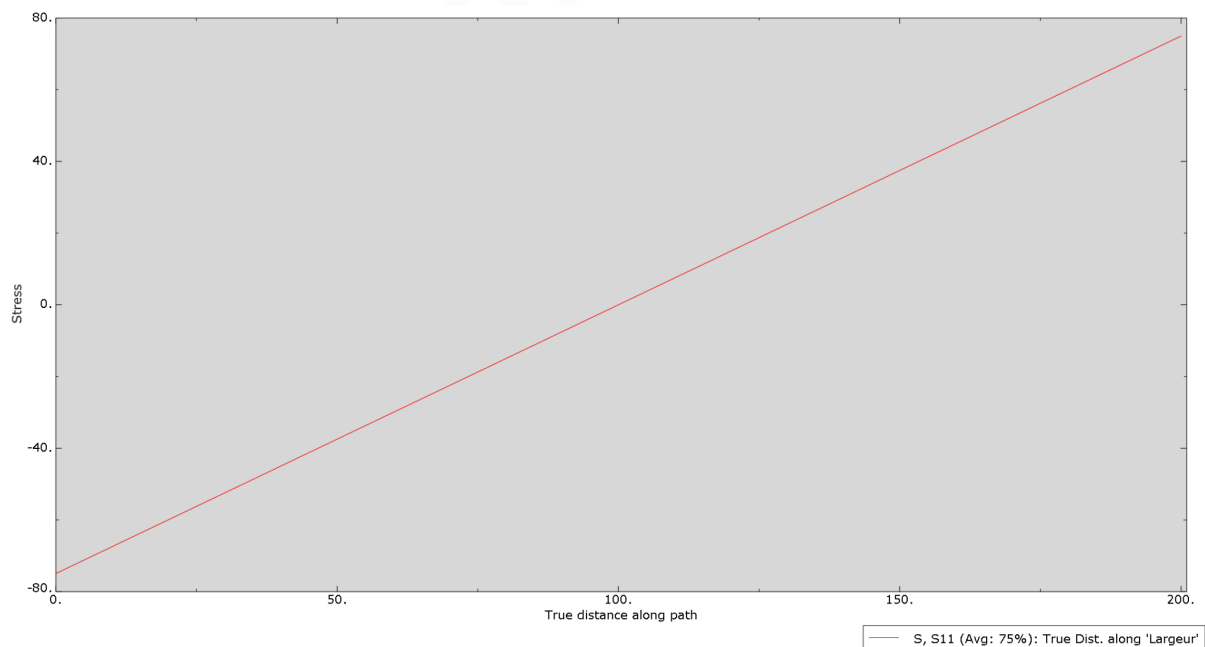


Figure 19 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

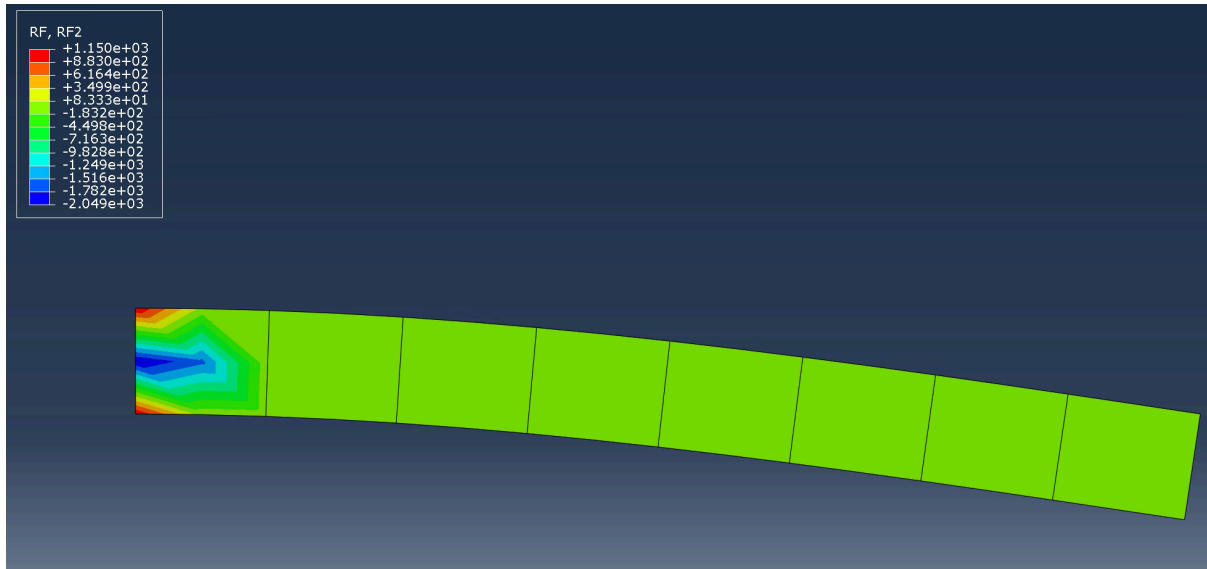


Figure 20 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

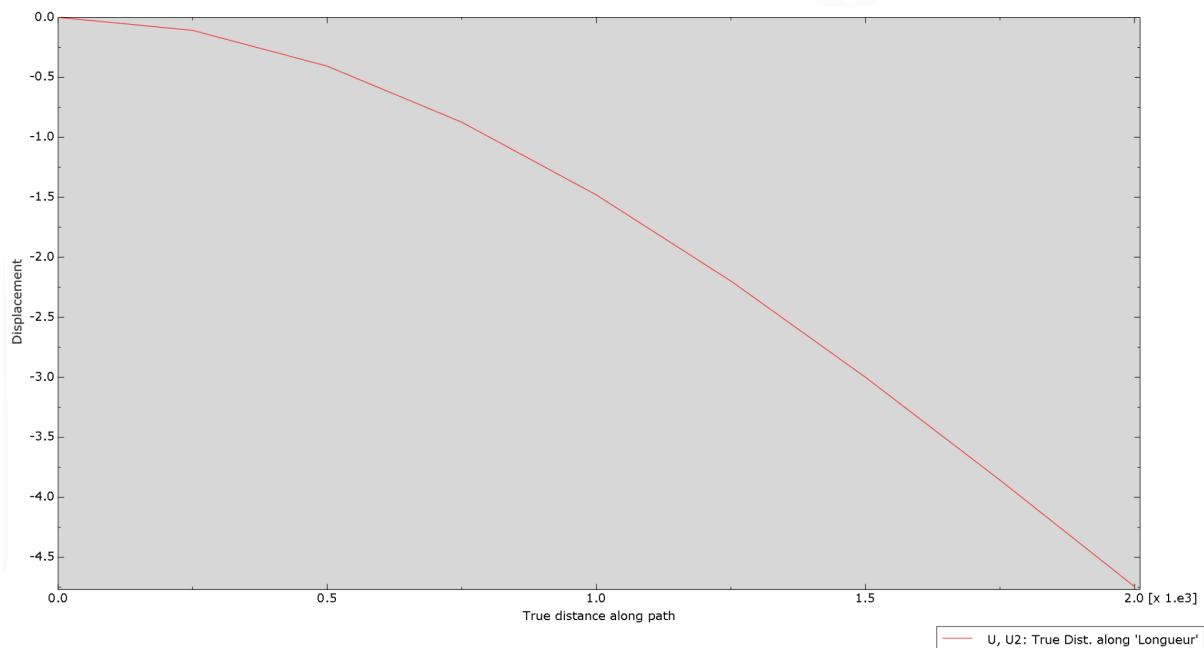


Figure 21 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

C'est ici que la supériorité des éléments quadratiques se montrent, car avec seulement 6 éléments, le CPS8 produit une flèche de 4,746 mm, soit une erreur de 0,33 % ce qui est mieux que le maillage 8x24 CPS4 à 192 éléments !

La contrainte maximale atteint $\pm 74,9$ MPa, pratiquement égale à la valeur théorique. Cela s'explique par la capacité des fonctions d'interpolation du second ordre à représenter exactement un champ de déplacement cubique, ce qui correspond précisément à la solution de la poutre en flexion.

La déformée U2 reproduit fidèlement la courbe analytique dès le premier maillage.

b) Maillage 2x12 — CPS8

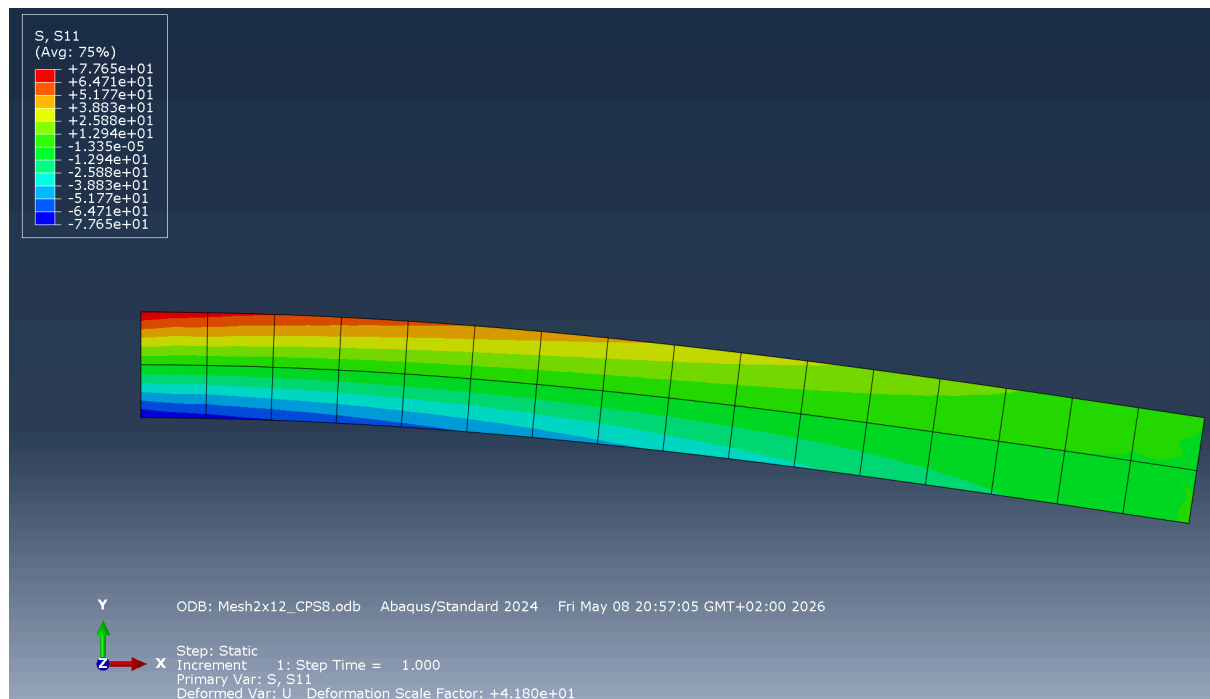


Figure 22 : Visualisation de la contrainte normale axiale (S11)

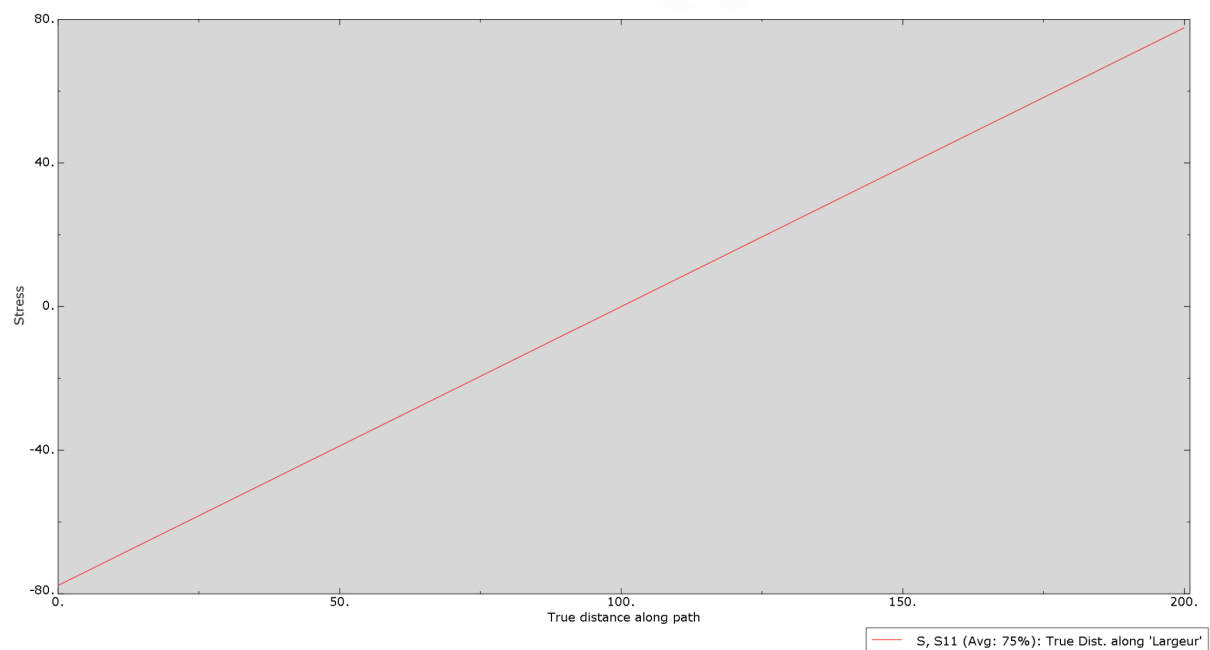


Figure 23 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

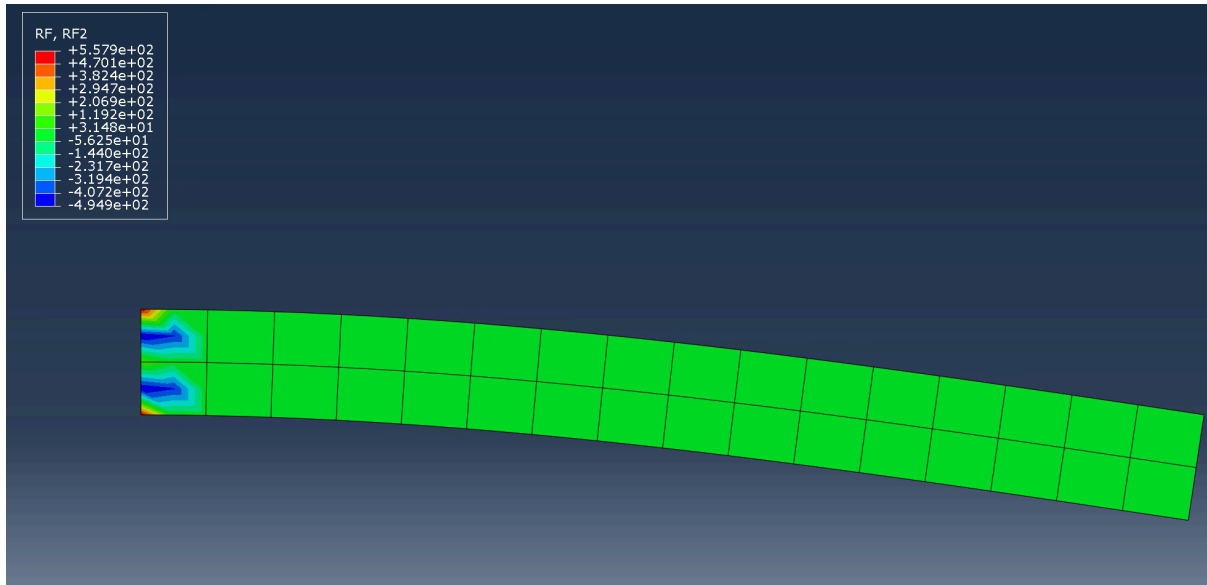


Figure 24 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

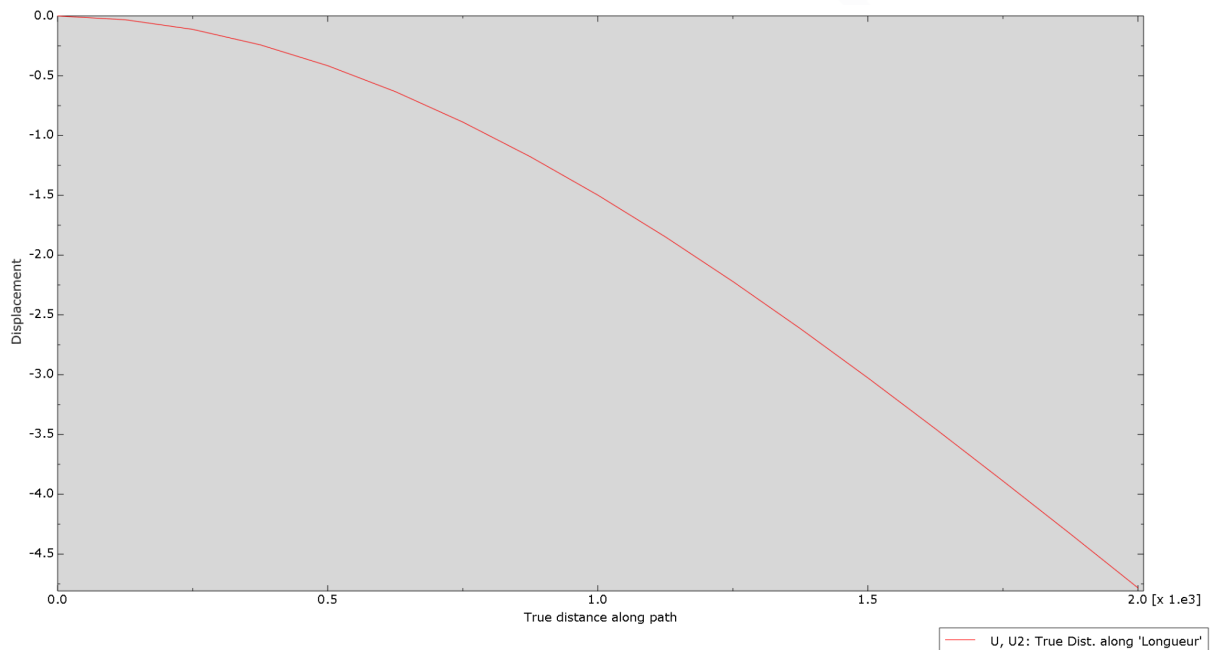
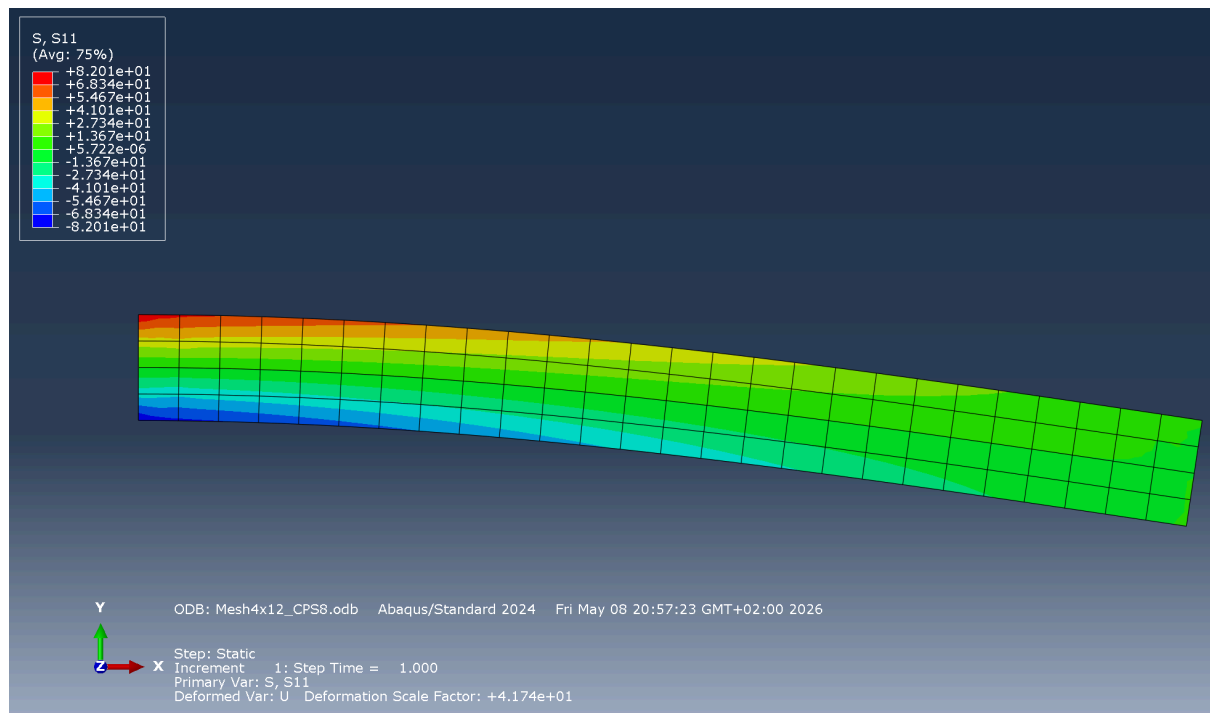
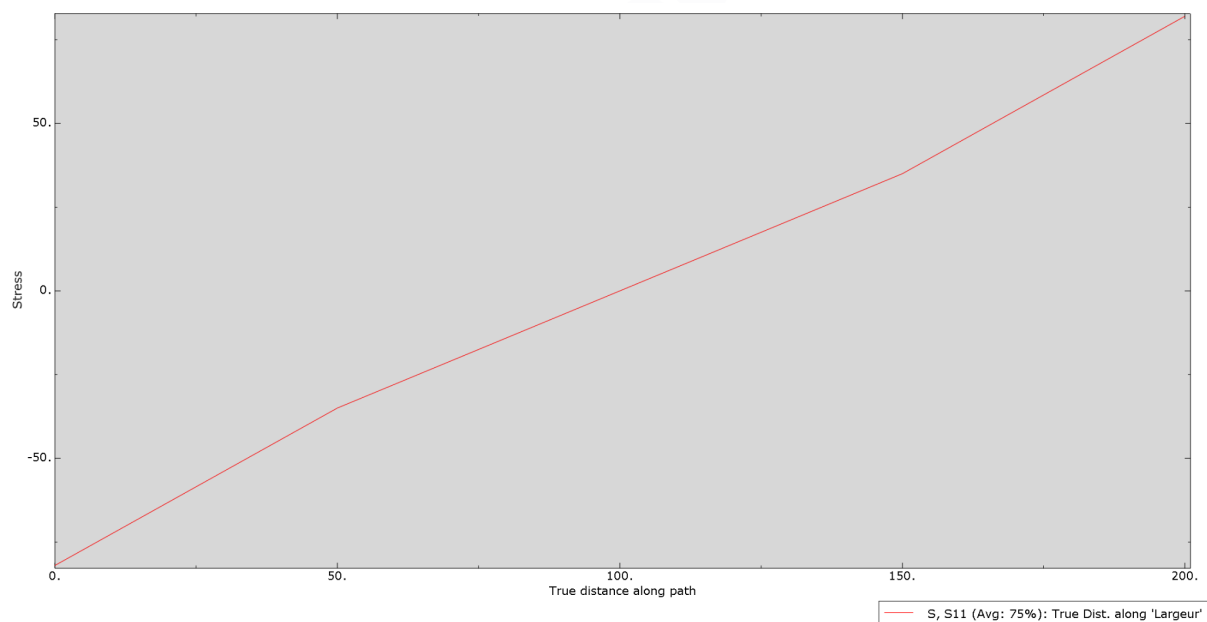


Figure 25 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

Avec 24 éléments quadratiques, le modèle donne une flèche de 4,784 mm (erreur de 0,46 %) et une contrainte de $\pm 77,6$ MPa. On remarque que l'erreur augmente très légèrement par rapport au maillage 1x6, ce genre de comportement, qualifié de non-monotone, peut s'expliquer par les effets numériques liés à l'intégration de Gauss et à la façon dont les éléments interagissent avec les conditions aux limites locales.

En pratique, toutes les valeurs restent très proches de la solution analytique et la précision globale est excellente. La convergence est déjà pratiquement atteinte dès ce niveau de discrétisation.

c) Maillage 4x12 — CPS8

Figure 26: Visualisation de la contrainte normale axiale (S_{11})Figure 27 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S_{11})

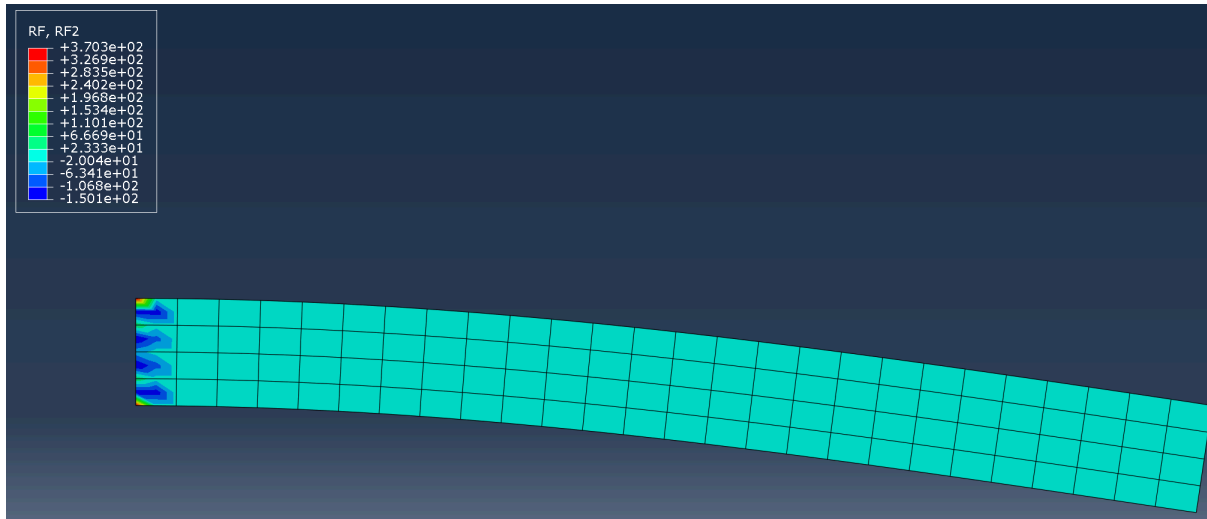


Figure 28 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

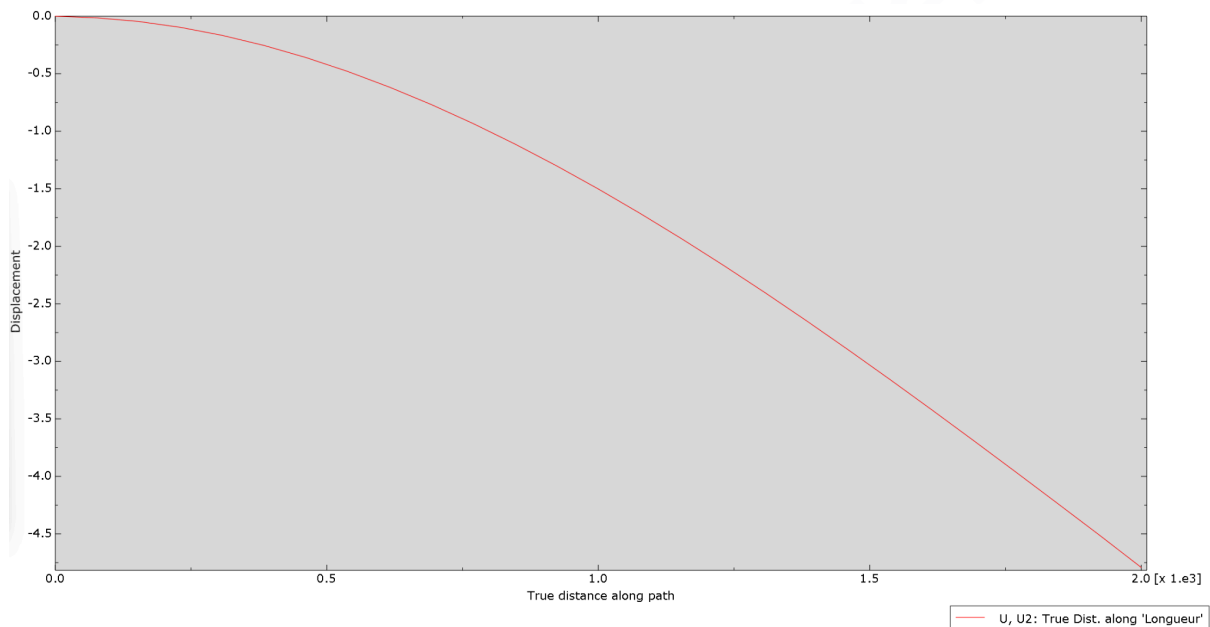


Figure 29 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

Ce maillage à 48 éléments quadratiques donne une flèche de 4,792 mm (erreur de 0,63 %) et une contrainte de ± 82 MPa. Là encore, l'erreur est légèrement supérieure aux configurations plus grossières en CPS8, ce qui confirme la tendance non-monotone observée. La distribution de S11 est bien linéaire et symétrique par rapport à la fibre neutre.

La déformée est quasi parfaite. À ce stade, on est déjà bien dans la zone de convergence, et continuer à raffiner le maillage n'apporte pas de gain significatif en précision tout en augmentant inutilement le coût de calcul.

d) Maillage 8x24 — CPS8

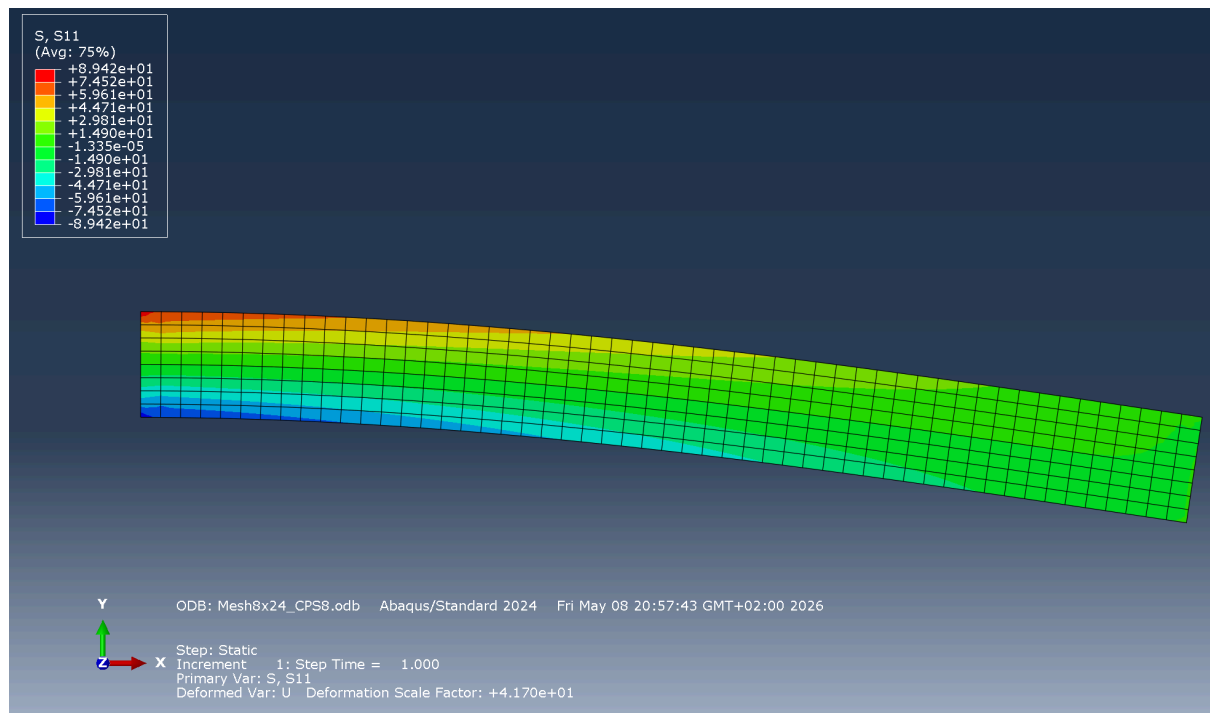


Figure 30 : Visualisation de la contrainte normale axiale (S11)

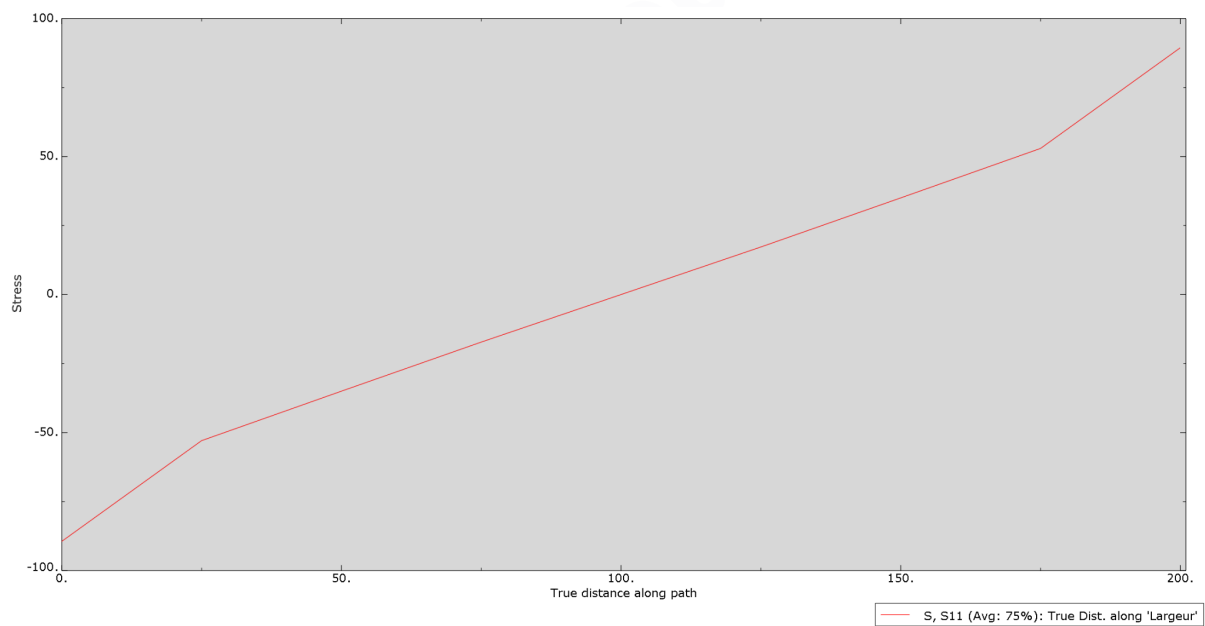


Figure 31 : Caractéristique de la contrainte normale en fonction de la largeur (S11)

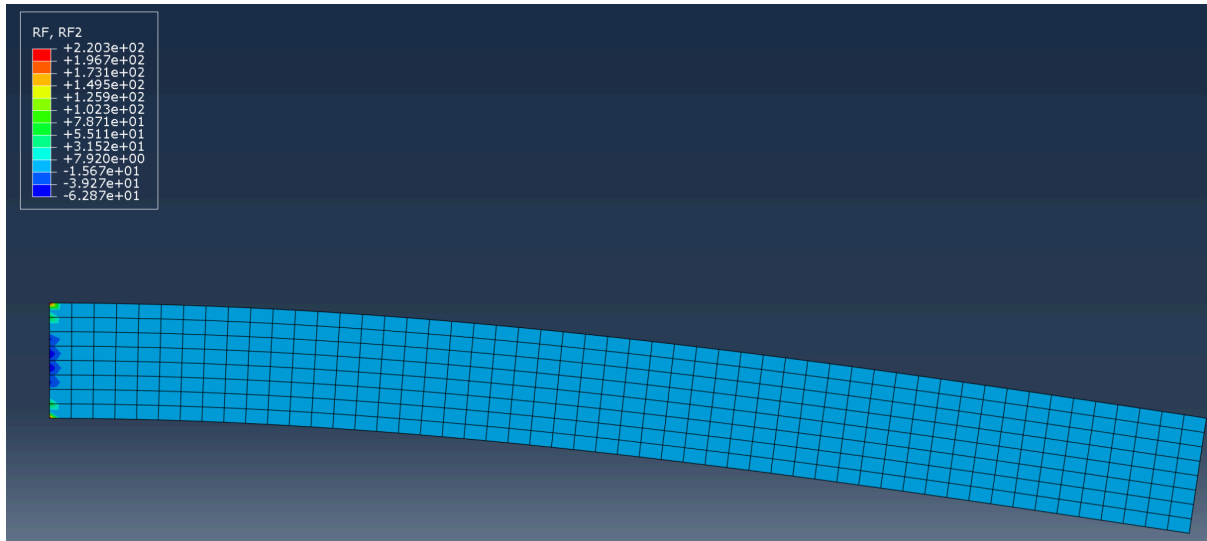


Figure 32 : Visualisation de la force de réaction nodale en N (RF2)

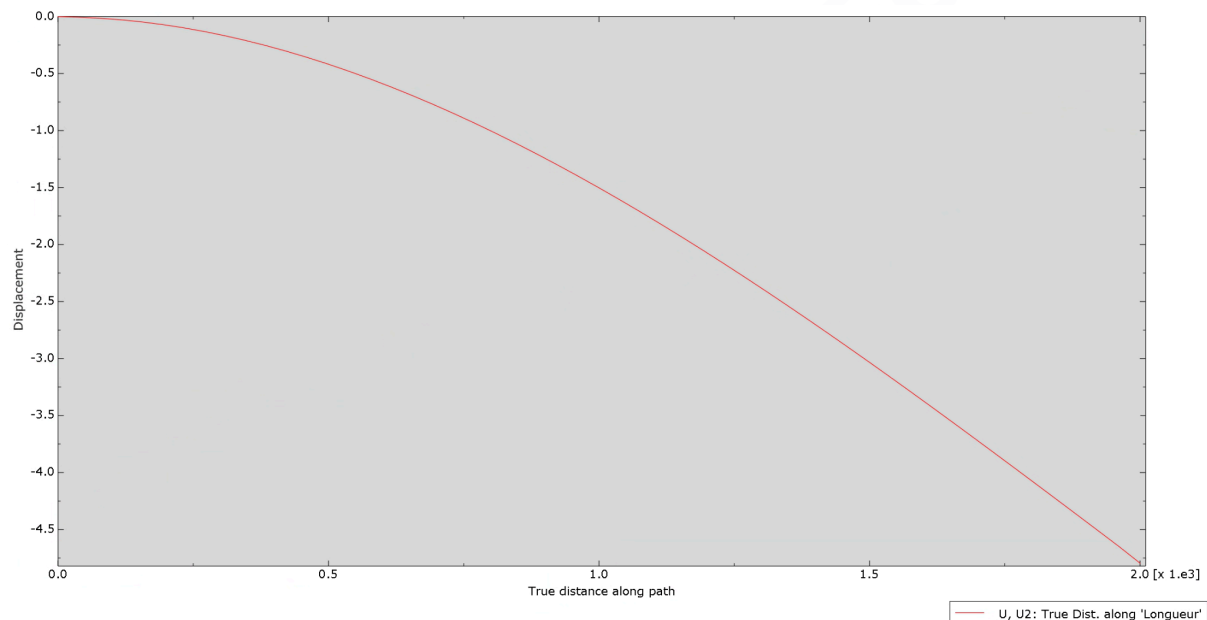


Figure 33 : Caractéristique de la déformée (déplacement) en fonction de la longueur (U2)

Le maillage le plus fin en quadratique (192 éléments) produit une flèche de 4,796 mm avec une erreur de 0,71 % et une contrainte de $\pm 89,4$ MPa. La contrainte maximale est la plus élevée de toute la série, cela s'explique par le fait qu'un maillage très fin capture mieux les concentrations de contraintes locales à l'encastrement, là où le modèle théorique simplifié d'Euler-Bernoulli fait une hypothèse de section droite uniforme.

Ce résultat illustre bien que raffiner indéfiniment le maillage peut éloigner légèrement des valeurs analytiques globales, car on capte des effets locaux que la théorie classique ne prédit pas. Toutes les vérifications d'équilibre restent parfaitement satisfaites.

5 - Analyse et discussion

Afin de faciliter la comparaison, j'ai regroupé toutes les valeurs extraites (déplacements maximaux, contraintes maximales et réactions aux appuis) dans le tableau récapitulatif ci-dessous. Cette partie me permet d'analyser la convergence des résultats vers la solution théorique RDM.

Je discute également de l'erreur relative obtenue pour chaque cas, ce qui met en évidence la supériorité des éléments quadratiques CPS8 par rapport aux éléments linéaires CPS4 pour ce problème de flexion.

Modèles	Nombre éléments	S11 max (MPa)	RF2 Total (N)	U2 max (mm)	Erreur U2
1x6 - CPS4	6	45.5	250	2.822	40.74%
2x12 - CPS4	24	66.3	250	4.067	14.59%
4x12 - CPS4	48	74.8	250	4.5	5.5%
8x24 - CPS4	192	81.5	250	4.717	0.94%
1x6 - CPS8	6	74.9	250	4.746	0.33%
2x12 - CPS8	24	77.6	250	4.784	0.46%
4x12 - CPS8	48	82	250	4.792	0.63%
8x24 - CPS8	192	89.4	250	4.796	0.71%
Analytique	-	75	250	4.762	0

Tableau 1 : Tableau des résultats

Remarque : On est bien en dessous de la limite élastique de l'acier pour chaque configuration.

$$\sigma_y = 400 \text{ MPa}$$

1. Influence de la taille de maille (convergence)

Les résultats du tableau montrent clairement que pour les éléments CPS4, la flèche maximale converge progressivement vers la valeur analytique à mesure que le maillage est raffiné.

L'erreur passe de 40,74 % pour le maillage 1x6 à 0,94 % pour le 8x24. Cette convergence est monotone, chaque raffinement améliore le résultat. En revanche, pour les éléments CPS8, la convergence est déjà atteinte dès le maillage 1x6, avec des erreurs inférieures à 1 % dans tous les cas.

On peut représenter cette tendance visuellement avec la figure 34 ci-dessous :

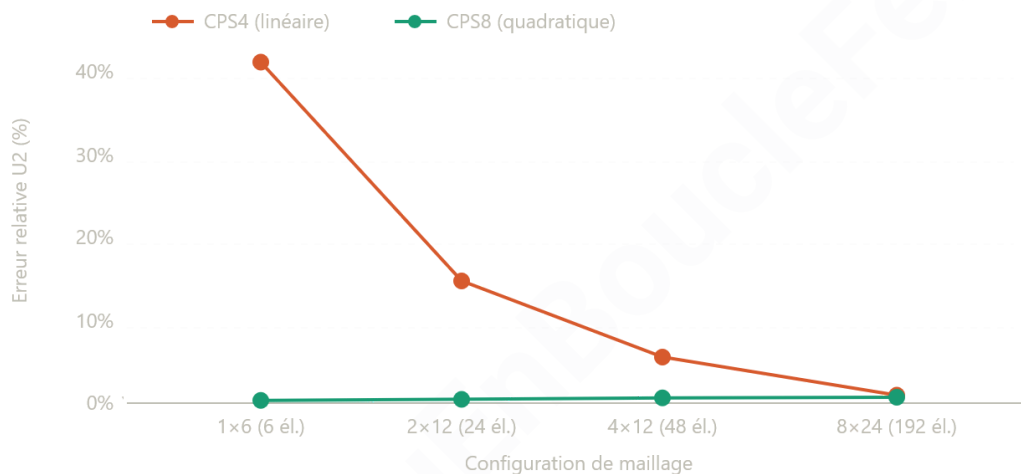


Figure 34 : Caractéristique de la convergence selon le maillage et l'ordre

Ce graphique illustre bien le phénomène de convergence, les éléments CPS4 nécessitent un maillage très dense pour atteindre une précision acceptable, tandis que les CPS8 sont déjà convergés dès le premier niveau de raffinement.

2. Influence de l'ordre d'interpolation (CPS4 vs CPS8)

La comparaison entre CPS4 et CPS8 est sans appel. À nombre d'éléments identiques (6 éléments), le CPS8 donne une erreur de 0,33 % contre 40,74 % pour le CPS4. Cette différence s'explique par la nature du problème, en flexion pure, le champ de déplacement est cubique en x .

Or, les fonctions d'interpolation quadratiques du CPS8 peuvent représenter exactement ce champ (ou du moins l'approcher à très haute précision avec un seul élément dans la hauteur), alors que les fonctions linéaires du CPS4 sont structurellement incapables de capturer cette courbure sans un grand nombre d'éléments.

Autrement dit, choisir l'ordre d'interpolation adapté au problème physique est beaucoup plus efficace que d'augmenter aveuglément la densité du maillage.

3. Phénomène de verrouillage en cisaillement (shear locking) pour CPS4 avec maillage grossier

Le shear locking est particulièrement visible sur le maillage 1x6 CPS4, où la flèche est réduite de 40 % par rapport à la valeur théorique. Quand un élément quadrilatéral linéaire est soumis à une flexion pure, il tend à développer des déformations de cisaillement parasites qui n'ont pas lieu d'être physiquement, le matériau résiste artificiellement à la flexion, ce qui rigidifie le modèle.

Raffiner le maillage atténue ce phénomène car les éléments deviennent plus petits et peuvent mieux approcher localement la courbure réelle. Les éléments CPS8, eux, n'en souffrent pas car leurs fonctions de forme quadratique leur permettent de représenter un gradient de déformation non-constant à l'intérieur de chaque élément.

6 - Conclusion

Ce TP m'a permis de mettre en évidence concrètement deux leviers fondamentaux en modélisation par éléments finis : la densité du maillage et l'ordre d'interpolation des éléments.

J'ai pu confirmer que la réaction aux appuis est toujours exactement de 250 N quelle que soit la configuration, ce qui valide systématiquement l'équilibre global du modèle. Un autre indicateur qui m'a permis de me rassurer sur la cohérence des résultats est la symétrie des couleurs dans les cartographies de contrainte S11. On observe systématiquement une distribution symétrique par rapport à la fibre neutre, avec des valeurs positives en traction et négatives en compression d'amplitude équivalente. Cela confirme que peu importe les valeurs nodales de RF2 qui peuvent sembler surprenantes à première vue, leur résultante de part et d'autre de l'encastrement donne bien 250 N. J'ai également vérifié que la contrainte maximale reste bien inférieure à la limite élastique de 400 MPa dans tous les cas, confirmant l'hypothèse de comportement linéaire élastique.

Ce qui m'a le plus marqué est la démonstration spectaculaire de l'efficacité des éléments quadratiques. Avec seulement 6 éléments CPS8, j'obtiens une précision bien meilleure que 192 éléments CPS4. Cela m'a appris qu'un bon choix de formulation élémentaire, adapté à la physique du problème, prime sur un simple raffinement brut du maillage. Dans un contexte industriel où le temps de calcul est une contrainte réelle, ce raisonnement est particulièrement précieux.

J'ai aussi compris intuitivement le phénomène de shear locking. Ce n'est pas une erreur de modélisation au sens strict, mais une limitation intrinsèque des éléments linéaires lorsqu'ils sont trop grossiers face à un champ de déformation à courbure marquée.

Ce TP m'a également permis de découvrir ABAQUS. Au départ je me suis dit que c'était un peu inutile car on peut déjà simuler avec des logiciels comme Inventor Nastran, plus accessibles et bien intégrés dans un workflow CAO classique. Mais j'ai vite compris que ces outils atteignent leurs limites dès qu'on sort du cadre linéaire simple. Pour du non-linéaire, des contacts ou des phénomènes de crash et d'auto-cognement, ils ne sont plus suffisants. ABAQUS est l'un des solveurs les plus puissants au monde, utilisé dans les industries aéronautique, automobile et nucléaire pour des simulations d'une complexité que peu d'outils peuvent rivaliser. Avoir eu une première prise en main dans ce cadre pédagogique est une vraie plus-value pour la suite.

Pour un problème de flexion de ce type, je préconiserais systématiquement des éléments CPS8 avec un maillage modéré plutôt que des éléments CPS4 avec un maillage très fin. Le rapport précision sur coût de calcul est nettement meilleur.

Bibliographie et Références Techniques

Bathe, K.J. — *Finite Element Procedures*, 2e édition, Prentice Hall, 2014. Ouvrage de référence du MIT, particulièrement complet sur les éléments plans, les conditions aux limites et la convergence des maillages.

Cook, R.D. — *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4e édition, Wiley, 2001. Présente de manière pédagogique la convergence des éléments finis et illustre les effets du shear locking sur des cas de flexion similaires à ce TP.

Dassault Systèmes — *Abaqus Analysis User's Guide*, version 2024, Simulia. Guide utilisateur de référence pour la définition des matériaux, des conditions aux limites et l'interprétation des variables de sortie S11, U2 et RF2.

Remarque pertinente : On peut observer sur ce graphique ci-dessous ([figure 35](#)) la distribution des forces de réaction nodales RF2 le long de la hauteur de la section encastree. La forme en V symétrique traduit le fait que l'encastrement reprend simultanément l'effort tranchant et le moment fléchissant. Les nœuds aux fibres extrêmes portent les réactions les plus élevées car ils sont les plus éloignés de la fibre neutre. Cette symétrie confirme la cohérence physique du modèle et valide la distribution linéaire des contraintes prédite par la théorie d'Euler-Bernoulli.

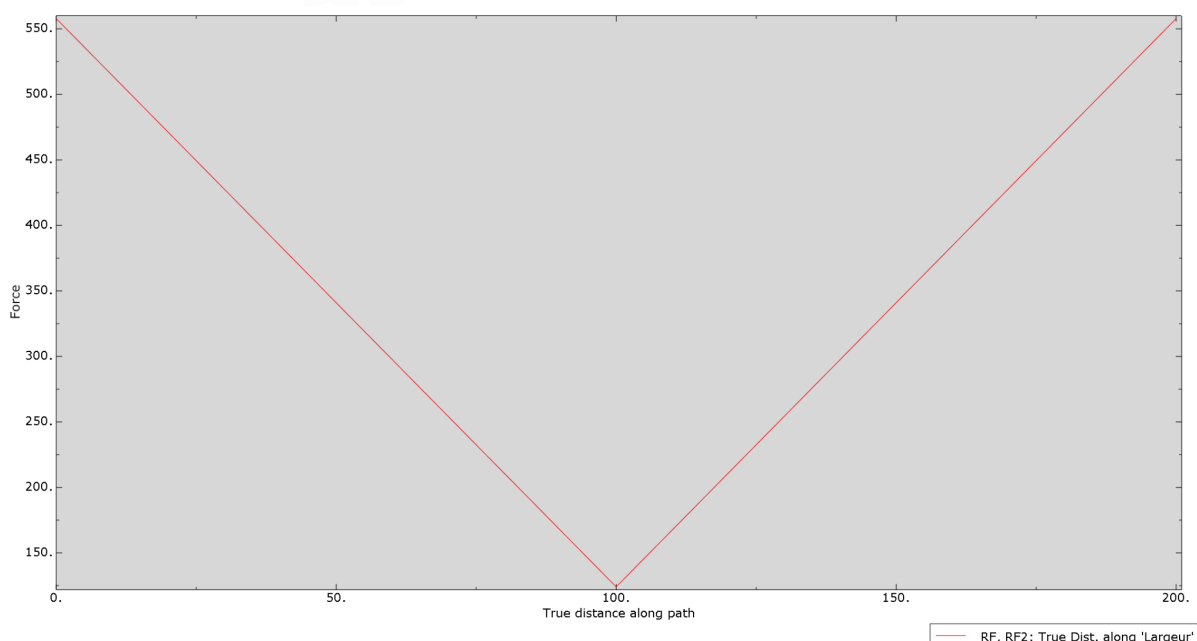


Figure 35 : Caractéristique de la convergence selon le maillage et l'ordre